

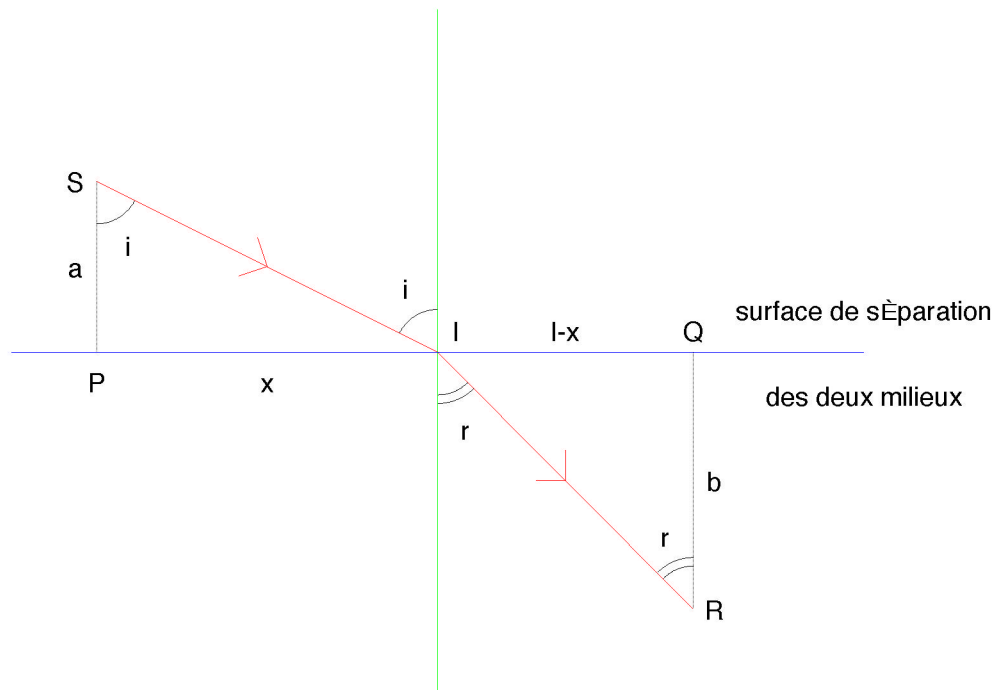
# Réfraction de la lumière.

## Principe de Fermat.

### Prolongements.

#### Prolongement 1.

Considérons deux milieux homogènes séparés par une surface plane. Dans le premier milieu, où la célérité de la lumière est  $c_1$ , un rayon lumineux part d'un point fixe  $S$ , traverse la surface de séparation (plane) des deux milieux au point d'incidence  $I$ , avec un angle d'incidence  $i$ , pénètre dans le deuxième milieu, où la célérité de la lumière est  $c_2$ , avec un angle de réfraction  $r$ , et se dirige vers un autre point fixe  $R$ . Le point  $I$  est situé dans le plan passant par  $S$  et  $R$  et normal à la surface de séparation des deux milieux, c'est-à-dire dans le plan d'incidence. En effet, si le point  $I$  s'écartait de ce plan, le rayon lumineux suivrait un chemin plus long et sa durée de propagation serait plus grande. C'est la première loi de la réfraction.



Soient  $P$  et  $Q$  les projections orthogonales de  $S$  et  $R$  sur la surface de séparation des deux milieux.

Posons  $SP = a$ ,  $RQ = b$ ,  $PQ = l$  et  $PI = x$ .

La durée  $t$  du trajet de la lumière vaut

$$t = \frac{SI}{c_1} + \frac{IR}{c_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}{c_2}.$$

Pour que cette durée soit minimale, il faut que la dérivée de  $t$  par rapport à  $x$  s'annule. Or, on a

$$\frac{d}{dx} t = \frac{x}{c_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{l-x}{c_2 \sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = \frac{\sin i}{c_1} - \frac{\sin r}{c_2}.$$

Par suite, il vient

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_1}{c_2}.$$

C'est la deuxième loi de la réfraction.

Remarquons que

$$\frac{d^2}{dx^2} t = \frac{a^2}{c_1 (a^2 + x^2)^{1.5}} + \frac{b^2}{c_2 (b^2 + (l-x)^2)^{1.5}} > 0.$$

C'est la preuve que l'extrémum de  $t$  est un minimum.

## Prolongement 2.

Rappelons qu'une hyperbole est une courbe plane dont les points ont la propriété suivante : la différence des distances à deux points fixes  $F$  et  $F'$  (appelés foyers) est une constante.

Prenons comme origine  $O$  des coordonnées le milieu du segment  $FF'$ . Orientons  $Ox$  de  $O$  vers  $F'$ . Orientons  $Oy$  perpendiculairement à  $FF'$  de manière qu'une rotation de  $Ox$  de  $\pi/2$ , dans le sens trigonométrique, l'amène sur  $Oy$ . Soit  $c$  la distance de  $F$  et de  $F'$  à  $O$ . L'équation de l'hyperbole est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

et celle de la branche de droite (abscisses positives) est

$$x = a \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}},$$

$a$  étant l'abscisse du sommet,  $b$  étant égal à  $\sqrt{c^2 - a^2}$ .

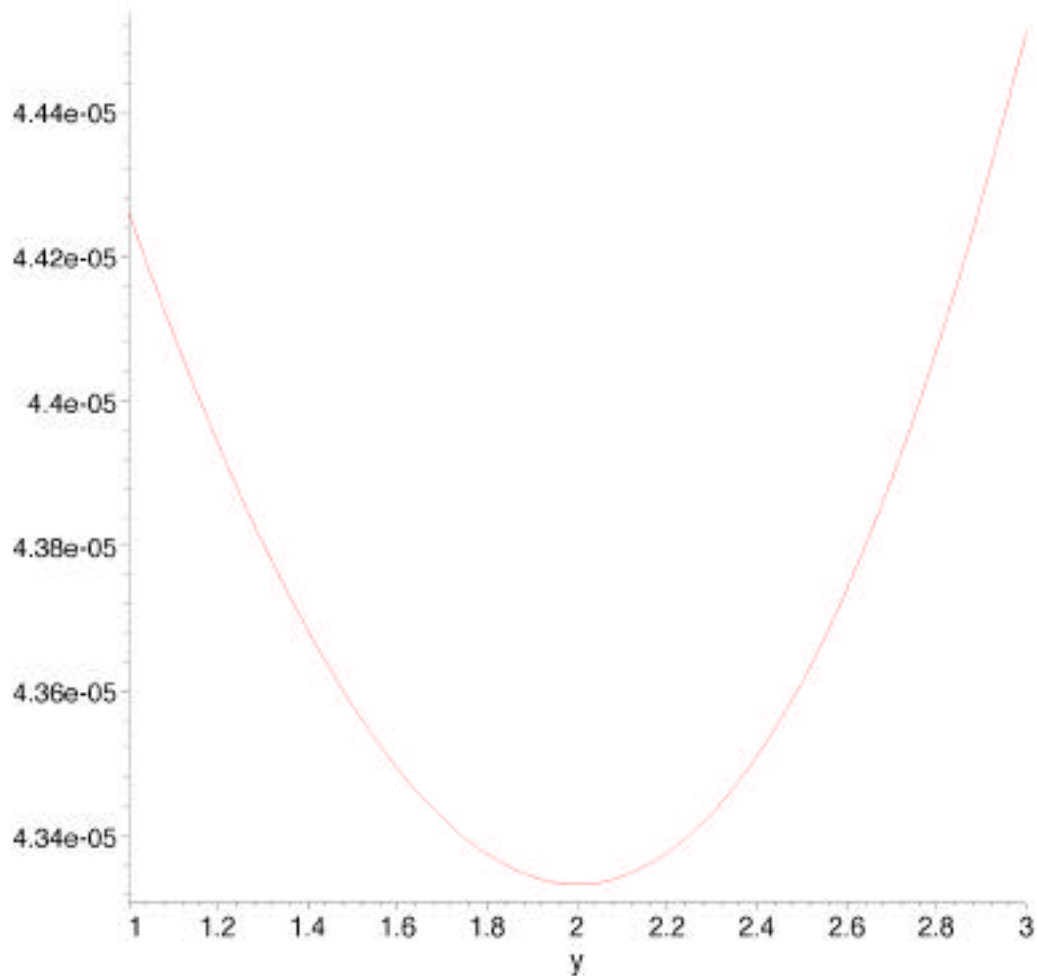
Soit  $P$  un point de coordonnées  $x_0, y_0$  situé dans la partie concave de la branche de droite. Considérons un rayon lumineux partant de  $P$ , traversant la branche de droite au point  $I$  de coordonnées  $x, y$  puis se dirigeant vers  $F$ . Calculons la durée du trajet  $PIF$ . Montrons que  $y = y_0$  lorsque cette durée est minimale, pour diverses valeurs de  $y_0$ . Condition requise : la célérité de la lumière  $c_1$  sur le trajet  $PI$  et la célérité de la lumière  $c_2$  sur le trajet  $IF$  sont liées par la relation

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

```

[ > restart:
[ > #assume(a>0,b>0,x0>a,y0>0,y0<b*sqrt(x0^2/a^2-1),c1>0,c2=a*c1/sqrt(
[ > a:=3: b:=4: x0:=6: y0:=2: c1:=300000:
[ > c2:=a*c1/sqrt(a^2+b^2);
[ > c2 := 180000
[ > x:=a*sqrt(1+y^2/b^2):
[ > duree:=sqrt((x-x0)^2+(y-y0)^2)/c2+sqrt((x+sqrt(a^2+b^2))^2+y^2)/c1
[ > ;
[ > duree :=  $\frac{1}{180000} \sqrt{\frac{3}{4} \sqrt{16+y^2} - 6^2 + (y-2)^2} + \frac{1}{300000} \sqrt{\frac{3}{4} \sqrt{16+y^2} + 5^2 + y^2}$ 
[ > plot(duree,y=1..3);

```

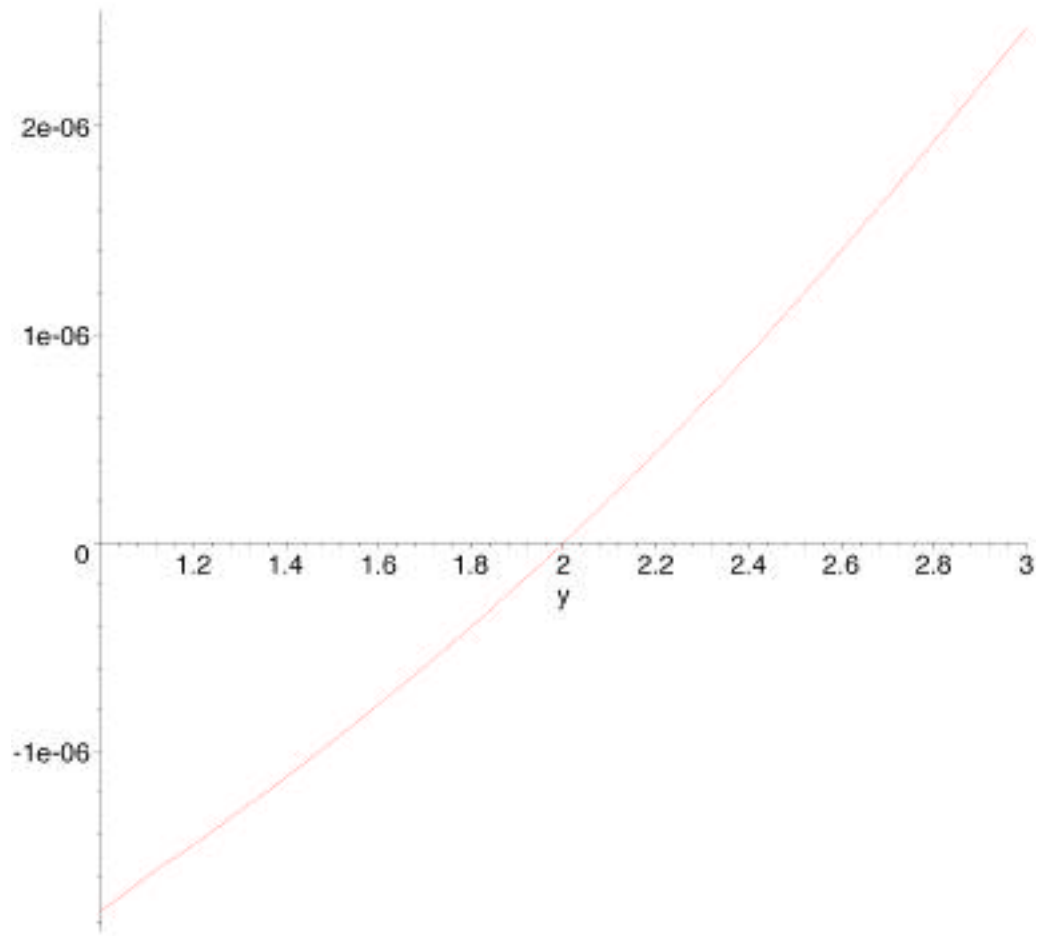


```

[ > derivee:=diff(duree,y);
[ > derivee :=  $\frac{1}{360000} \frac{\frac{3}{4} \sqrt{16+y^2} - 6 y}{\sqrt{\frac{3}{4} \sqrt{16+y^2} - 6^2 + (y-2)^2}} + \frac{1}{600000} \frac{\frac{3}{4} \sqrt{16+y^2} + 5 y}{\sqrt{\frac{3}{4} \sqrt{16+y^2} + 5^2 + y^2}}$ 
[ > with(plots):

```

```
> plot(derivee,y=1..3);
```



```
> sol:=fsolve(derivee=0,y);
```

```
sol := 2.000000000
```

```
>
```